**Решение задач для поступления на кафедру Acronis**

**Задача №2**

*Постановка задачи:* Найти число уникальных конечных комбинаций, возникающих в игре крестики-нолики.

*Решение задачи:*

1. Найдем число уникальных комбинаций партий, закончившихся **на 5 ходу**:
2. Всего есть *8* вариантов расположения знаков, при которых партия заканчивается
3. Для каждой такой комбинации три крестика определены однозначно, а оставшиеся *2 нолика* мы можем *расположить в* *любые из оставшихся 6 клеток:*

**В итоге:**

1. **На 6 ходу**:
2. Аналогично пункту **1.a)** возникает множитель *8*
3. Аналогично пункту **2.a)** возникает множитель
4. Однако в этот раз все усложняется тем, что в пункте **2.b)** мы учитываем и расположение 3 крестиков в выигрышной позиции, поэтому из слагаемого полученного из пунктов **2.a)** и **2.b)** нужно вычесть эти комбинации. Найдем это вычитаемое значение:

Т.к. диагональные выигрышные комбинации из крестиков уже не возможны (из-за однозначного наличия комбинации из 3

ноликов), то теперь *коэффициент меняется с 8 на 6*

Для каждой выигрышной комбинации из трех крестиков

остается *2 варианта расположения 1 выигрышной комбинации* из трех ноликов

**В итоге:**

1. **На 7 ходу**:
2. Аналогично пункту **1.a)** возникает множитель 8
3. При конкретном расположении выигрышной комбинации, *3 нолика* можно *расположить в 6 клеток* (без учета того, что они не могут образовывать выигрышную комбинацию)
4. И кроме этого надо *расположить 1 крестик* который может стоять *в одной из 3 клеток*
5. Аналогично пункту **2.c)**, только с ноликами и теперь в каждой из таких комбинаций, оставшийся *1 крестик* можно еще *расположить в одной из 3 клеток.*

**В итоге:**

1. **На 8 ходу**:
2. Аналогично пункту **1.a)** возникает множитель 8
3. При конкретном расположении выигрышной комбинации,

*4 крестика* можно *расположить в 6 клеток* (без учета того, что они не могут образовывать выигрышную комбинацию)

1. И кроме этого надо *расположить 1 нолик* который может стоять *в одной из 2 клеток*
2. Аналогично пункту **2.c)**, только теперь в каждой из таких комбинаций, оставшийся *1 нолик* можно еще *расположить в одной из 3 клеток и* оставшийся *1 крестик в одной из 2 клеток*

**В итоге:**

1. На 9 ходувсе усложняется. После нужно будет посчитать еще ничейные комбинации, а также основные вычисления так просто уже не проходят. **Выигрышных уникальных конечных комбинаций на 9 ходу**:
2. В этом случае, когда мы рассматриваем диагональные выигрышные комбинации и после их рассмотрения ставим 2 крестика так, что на поле получаются 2 выигрышные комбинации, а потом так же делаем с вертикальными или горизонтальными выигрышные комбинациями, то учитываем одну и ту же комбинацию 2 раза. Всего *диагональных выигрышных комбинаций 2*, а *горизонтальных и вертикальных 6.*
3. В связи с пунктом **5.a)** при подсчете, количество конечных комбинаций, которые на доске будут давать 2 выигрышных комбинации, будем делить пополам (т.к. учитываем их 2 раза, в подсчете диагональных вариантов и вертикальных с горизонтальными).
4. Так же стоит отметить то, что в данном случае нам стоит расположить только крестики, т.к. нолики потом будут расположены однозначно, и то, что в данном пункте мы будем считать сразу те комбинации, которые не приведут к наличию на поле 2 выигрышных комбинаций (одной из крестиков и другой из ноликов)
5. При определенном расположении выигрышной комбинации нам нужно *расположить 2 крестика на 6 полей*, это число равно:
6. Для каждой из диагональных комбинаций существует *7* вариантов расположения двух крестиков, при которых конечные комбинации будут учтены дважды, тогда это количество будет делится на *2*.
7. Аналогично для вертикальных выигрышных комбинаций: только там *количество таких вариантов будет равно 5*. Но также надо учесть, что оставшиеся 2 крестика нужно расположить так, чтобы не получилось комбинации из 3 ноликов, т.е. теперь всего вариантов:

**В итоге:**

1. **Теперь рассмотрим ситуацию с ничьими:**
2. Первым делом докажем, что в ничейной комбинации обязательно имеются два нолика стоящие рядом в одной вертикали или горизонтали. Докажем для горизонтали, т.к. тогда для вертикали все решается простым поворотом или симметричным отображением.

*Доказательство*: Пусть это не так, тогда неизбежна такая:

, либо такая: , либо такая: .

Все остальные получаются симметричным отображением и поворотом.

**В первом** варианте, нужно закрыть одну выигрышную комбинацию и с помощью одного нолика можно это сделать лишь одним способом, при котором как раз получается ничейная комбинация и два нолика стоят рядом в одной горизонтали.

**Во втором** варианте нет способов одним ноликом закрыть две диагонали и не получить при этом выигрышной комбинации из трех ноликов.

**В третьем** варианте есть три способа расположить нолик, все они находятся на 2 вертикали, и могут располагаться на первой, второй и третьей горизонталях и в любом из этих вариантов получается ничейная комбинация, в которой два нолика стоят рядом в одной горизонтали.

1. Теперь рассмотрим два паттерна, при которых может получится ничейная комбинация (все остальные получаются симметрией и поворотом):

, .

1. Рассмотрим *первый паттерн* и пронумеруем позиции от 1 до 9 таким образом:



Тогда будем рассматривать расположение последнего нуля только в верхнюю часть (нижнюю рассматривать смысла нет из-за симметрии)

Расположение нолика в позиции 1 заставляет нас ставить

следующий ноль в позицию 9, что дает выигрышную диагональную комбинацию из 3 нулей, что для нас невозможно. ***×***

А вот постановка первого нолика в позицию 2 заставляет нас

ставить второй ноль так же в 9 позицию и в конечном итоге дает ничейную комбинацию. ***✓***

Постановка нолика в позицию 3 приводит к единственному варианту постановки последнего нуля в позицию 9 и образует ничейную комбинацию ***✓***

1. Теперь рассмотрим второй паттерн и пронумеруем поля аналогично.

Расположение нолика в месте, где нет пересечения двух

красных линий невозможно, т.к. тогда придется ставить

оставшийся нолик на пересечение трех линий, а такового в этом случае нет. ***×***

Постановка одного из нулей в позицию 3 заставляет ставить второй нолик в позицию 5, и аналогично наоборот, остается только один вариант, это расположение одного из нулей в позицию 1, а второго в позицию 6. Таким образом получили еще 2 комбинации с учетом, того, что найденную можно отобразить симметрично. ***✓✓***

**В итоге:**

1. На самом деле количество ничьих плюс количество выигрышей на 9 ходу можно найти намного проще. **Выигрышных и ничейных уникальных конечных комбинаций на 9 ходу**:
2. Всего вариантов расстановок, при которых на поле находятся 4 нолика и 5 крестиков
3. Аналогично вычитаем все варианты, при которых три нолика в конечной расстановке составляют выигрышную комбинацию. Таковых:

**В итоге:**

***В конечном итоге всего уникальных комбинаций:***

**Для проверки полученных результатов написан (на скорую руку) класс, расположенный в папке с этим файлом.**